Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
22 de abril de 2013
Geometria Analítica - 1° Semestre 2013 – 1ª Prova

Nome:____

ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

01. (3,5 pontos) Diversas quantidades em física são obtidas através de operações vetoriais. Observe atentamente as definições e responda os itens a seguir.

Segunda Lei de Newton: $\vec{F}_R = m\vec{a}$, onde $\vec{F}_R$ é a força resultante que atua sobre uma partícula de massa m e $\vec{a}$ é a aceleração adquirida pela partícula.

Trabalho de uma força constante: o trabalho W de uma força resultante constante $\vec{F}_R$ sobre uma partícula é calculado na forma $W = \vec{F}_R \cdot \vec{d}$, onde $\vec{d} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$ é o deslocamento da partícula, desde a sua posição inicial $\vec{r}_i$ até sua posição final $\vec{r}_f$.

Força magnética: a força magnética experimentada por uma partícula de carga q, com velocidade $\vec{v}$ em um campo magnético $\vec{B}$ tem a forma $\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B})$.

Campo elétrico: o campo elétrico produzido por uma partícula de carga q no vácuo em um ponto P do espaço tem a forma $\vec{E} = kq\hat{r}/r^2$, onde $\vec{r}$ é o vetor que liga a carga e o ponto P, $\hat{r}$ é o vetor unitário que aponta na direção de $\vec{r}$ e $k = 9 \times 10^9\ Nm^2/C^2$ é a constante eletrostática do vácuo.

a) (1,0) Calcule a aceleração resultante de uma partícula de massa $m = 2{,}0\ kg$ que está sob ação das forças $\vec{F}_1 = (2\hat{x} - 5\hat{y} + 4\hat{z})\ N$, $\vec{F}_2 = (-9\hat{x} - 3\hat{z})\ N$ e $\vec{F}_3 = (7\hat{x} + 15\hat{y} + \hat{z})\ N$.
b) (1,0) Calcule o trabalho da força resultante anterior se a partícula vai da posição $\vec{r}_i = (-1, 0, 3)\ m$ até $\vec{r}_f = (5, 2, -3)\ m$.
c) (1,0) Calcule a força magnética de uma partícula de carga $q = -1{,}0\ C$ que no instante em que sua velocidade é $\vec{v} = (\hat{x} + 2\hat{y})\ m/s$ e o campo magnético que atua sobre ela vale $\vec{B} = (3\hat{x} - 5\hat{z})\ T$.
d) (0,5) Calcule o campo elétrico no ponto P, de coordenadas $(1, 1, 1)\ m$, que é produzido por uma carga igual a $q = 1/9\ C$ localizada na origem do sistema de coordenadas cartesianas.

02. (3,0 pontos) Duas partículas A e B possuem velocidades constantes e iguais a $\vec{v}_A = (-1, -3,\ 3)\ m/s$ e $\vec{v}_B = (-1,\ 2, -2)\ m/s$. Quando $t = 0\ s$, as posições das partículas A e B são $(0, 2, -1)\ m$ e $(0, 1, 0)\ m$, respectivamente.

a) (1,0) Calcule o ângulo entre as velocidades de A e B.
b) (1,0) Escreva as equações das retas que descrevem as trajetórias das partículas A e B.
b) (1,0) Calcule as coordenadas do encontro entre as duas partículas.

03. (2,0 pontos) As retas r e s pertencem a um mesmo plano π e possuem equações

$$r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x,\ y,\ z) = (1 - t, 0, t)\}$$

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x,\ y,\ z) = (1 - t, -t, 0)\}$$

para t em segundos e (x, y, z) em metros.

a) (1,0) Escreva a equação geral do plano π que contém as retas r e s.
b) (1,0) Determine a distância do ponto $P(2, 1, 1)$ ao plano π.

04. (1,5 pontos) Considere os vetores $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ e $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$.

a) (1,0) Mostre que $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ formam um conjunto linearmente independente.
b) (0,5) Escreva o vetor $\vec{w} = (5, -2, 4)$ como combinação linear de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

Geometria Analítica - 1ª Prova

2018.1 - Gabarito

#01. a) $\vec{F}_R = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{\vec{F}_R}{m}$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

$$\vec{F}_R = \hat{x}(2-9+7) + \hat{y}(-5+0+15) + \hat{z}(4-3+1)$$

$$\vec{F}_R = 0\hat{x} + 10\hat{y} + 2\hat{z}$$

$$\vec{F}_R = (10\hat{y} + 2\hat{z})\,N$$

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{F}_R = \frac{1}{2}(10\hat{y} + 2\hat{z}) = 5\hat{y} + \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{a} = (5\hat{y} + \hat{z})\,m/s^2}$$

b) $W = \vec{F}_R \cdot \vec{d}$, $\vec{F}_R = (10\hat{y} + 2\hat{z})\,N$

$$\vec{d} = \vec{r}_f - \vec{r}_i = \hat{x}[5-(-1)] + \hat{y}(2-0) + \hat{z}(-3-3)$$

$$\vec{d} = (6\hat{x} + 2\hat{y} - 6\hat{z})\,m$$

$$W = 0.6 + 10.2 + 2.(-6) \Rightarrow \boxed{W = 8J}$$

02

c) $\vec{F}_B = q(\vec{v}\times\vec{B})$

$$\vec{v}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

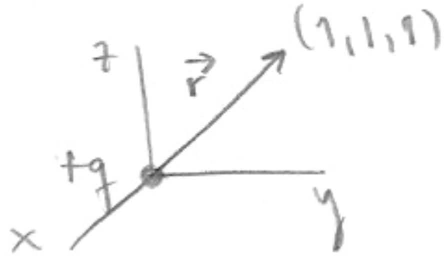
$$\vec{v}\times\vec{B} = \hat{x}(-10-0)+\hat{y}[0-(-5)]+\hat{z}(0-6)$$

$$\vec{v}\times\vec{B} = -10\hat{x}+5\hat{y}-6\hat{z}$$

$$\vec{F}_B = (-1)(-10\hat{x}+5\hat{y}-6\hat{z})$$

$$\boxed{\vec{F}_B = (10\hat{x}-5\hat{y}+6\hat{z})\ \text{N}}$$

d) $\vec{E} = \dfrac{kq\hat{r}}{r^2}$, $\vec{r} = (1-0, 1-0, 1-0)$



$\vec{r} = (1,1,1)$

$r = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

$r^2 = 3$

$\hat{r} = \dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} \Rightarrow \vec{E} = \cancel{9}\cdot 10^9 \cdot \dfrac{1}{\cancel{9}} \cdot \dfrac{(1,1,1)}{3\sqrt{3}}$

$\rightarrow$

$$\vec{E} = 10^9 \frac{(1,1,1)}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{10^9\sqrt{3}}{9}(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})\, N/C}$$

\#02. a) $\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = |\vec{v}_A||\vec{v}_B|\cos\phi$

$$\cos\phi = \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B}{|\vec{v}_A||\vec{v}_B|}$$

$$\vec{v}_A \cdot \vec{v}_B = (-1,-3,3) \cdot (-1,2,-2)$$

$$= (-1).(-1) + (-3).2 + 3.(-2)$$

$$= 1 - 6 - 6 = -11$$

$$|\vec{v}_A| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{19}$$

$$|\vec{v}_B| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\cos\phi = \frac{-11}{\sqrt{19}.3} \Rightarrow \cos\phi = -\frac{11\sqrt{19}}{57}$$

$$\boxed{\phi = \arccos\left(-\frac{11\sqrt{19}}{57}\right)}$$

04

b)
$$x_A = x_{0A} + v_{Ax}t \qquad x_B = x_{0B} + v_{Bx}t$$
$$y_A = y_{0A} + v_{Ay}t \qquad y_B = y_{0B} + v_{By}t$$
$$z_A = z_{0A} + v_{Az}t \qquad z_B = z_{0B} + v_{Bz}t$$

$t=0:$ $x_{0A} = 0$ $\qquad$ $t=0:$ $x_{0B} = 0$

$y_{0A} = 2$ $\qquad$ $y_{0B} = 1$

$z_{0A} = -1$ $\qquad$ $z_{0B} = 0$

$$\vec{v}_A = (-1,-3,3)\,\text{m/s} \qquad \vec{v}_B = (-1,2,-2)\,\text{m/s}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= -t \\ y_A &= 2-3t \\ z_A &= -1+3t \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} x_B &= -t \\ y_B &= 1+2t \\ z_B &= -2t \end{aligned}}$$

c) $x_A = x_B \Rightarrow 1 = 1$

$y_A = y_B \Rightarrow 2-3t = 1+2t$

$2-1 = 2t+3t$

$t = 1/5$

$z_A = z_B \Rightarrow -1+3t = -2t \Rightarrow t = 1/5$

→

$$x_A = x_B = -t = -1/5 \; m$$

$$y_A = 2 - 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{10-3}{5} = \frac{7}{5} m = y_B$$

$$z_A = -1 + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{-5+3}{5} = -\frac{2}{5} m = z_B$$

Encontro em $\boxed{(x,y,z) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{5}, -\frac{2}{5}\right) m}$

#03. $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$

1) $\vec{v_r} = (-1, 0, 1)$, $\vec{v_s} = (-1, -1, 0)$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{n} = \hat{x}(0+1) + \hat{y}(-1+0) + \hat{z}(1-0)$$

$$\vec{n} = (1, -1, 1)$$

$\longrightarrow$

06

$$\vec{n} = (1, -1, 1)$$

$$\pi : x - y + z + d = 0$$

Para $t=0$ em $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) \in \pi$,

logo

$$1 - 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -1$$

$$\boxed{\pi : x - y + z - 1 = 0}$$

b) $$d(P, \pi) = \frac{|x_p - y_p + z_p - 1|}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}$$

$$= \frac{|2 - \cancel{1} + \cancel{1} - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{d(P, \pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

#04. a) $\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \neq 0 \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ LI

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-0) + 1(0-0) + 1(0-1)$$

$\vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = -1 \neq 0 \Rightarrow \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é L.I

b) $\vec{w} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3$

$(5, -2, 4) = (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, \beta, 0) + (\gamma, 0, 0)$

$$\begin{cases} 5 = \alpha + \beta + \gamma \\ -2 = \alpha + \beta \\ 4 = \alpha \end{cases} \Rightarrow -2 = 4 + \beta \Rightarrow \beta = -6$$

$5 = 4 - 6 + \gamma$

$\gamma = 7$

$$\boxed{\vec{w} = 4\vec{v}_1 - 6\vec{v}_2 + 7\vec{v}_3}$$