Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
27 de junho de 2013
Geometria Analítica - 1° Semestre 2013 – 2ª Chamada

Nome:____
ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

01. (2,5 pontos) Considere os vetores $\vec{v} = (1, -1, 2)$, $\vec{u} = (3, 4, -2)$ e $\vec{w} = (-5, 1, -4)$ e os pontos $P(1, 3, 2)$ e $Q(2, -1, 4)$.

a) (0,5) Determine o valor do produto misto $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$.
b) (1,0) Calcule o vetor $\vec{\lambda}$ sabendo que $(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{\lambda} = 2\vec{v} - \vec{w} + \overrightarrow{QP}$.
c) (1,0) Obtenha o vetor $\vec{\sigma} = [\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})]\hat{\lambda}$.

02. (3,0) Considere a reta r que passa pelos pontos $A(1, -1, 0)$ e $B(1, 0, 1)$ e a reta s: $X = (-8, 0, 6) + t(2, 2, -1)$.

a) (1,0) Determine as equações paramétricas da reta r.
b) (1,0) Determine a posição relativa entre as retas r e s.
b) (1,0) Calcule a distância entre as retas r e s.

03. (2,5 pontos) Considere a cônica de equação

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

a) (0,5) Identifique a cônica.
b) (1,0) Determine todos os elementos desta cônica.
c) (1,0) Faça um esboço identificando os elementos encontrados.

04. (2,0 pontos) Considere a superfície cilíndrica cuja interseção com o plano $z = 0$ é uma parábola de vértice $V\ (1, 4, 0)$ e foco $F(-2, 4, 0)$.

a) (1,0) Obtenha a equação da superfície cilíndrica.
b) (1,0) Faça um esboço da superfície.

GEOMETRIA ANALÍTICA

2ª CHAMADA 2013.1

GABARITO

#01. a).

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-16+2) - 1(10+12) + 2(3+20)$$

$$= -14 - 22 + 46 = -36 + 46 = 10.$$

$$\boxed{\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = 10}$$

b) $\vec{v}\cdot\vec{u} = (1,-1,2)\cdot(3,4,-2)$

$= 3 - 4 - 4 = -5$

$2\vec{v} = (2,-2,4)$

$\overrightarrow{QP} = P - Q = (1,4,-2)$

$2\vec{v} - \vec{w} + \overrightarrow{QP} = (2,-2,4) - (-5,1,-4) + (1,4,-2)$

$= (2+5+1, -2-1+4, 4+4-2)$

02

$$2\vec{v} - \vec{w} + \vec{QP} = (8,1,6)$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{\lambda} = 2\vec{v} - \vec{w} + \vec{QP}$$

$$-5\vec{\lambda} = (8,1,6) \Rightarrow \boxed{\vec{\lambda} = -\frac{1}{5}(8,1,6)}$$

c) $\vec{\sigma} = [\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})]\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = \frac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|}, \quad |\vec{\lambda}| = \sqrt{8^2/5^2 + 1^2/5^2 + 6^2/5^2}$$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{64+1+36} = \frac{\sqrt{101}}{5}$$

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{\cancel{5}}(8,1,6) \cdot \frac{\cancel{5}}{\sqrt{101}} \Rightarrow \hat{\lambda} = -\frac{1}{\sqrt{101}}(8,1,6)$$

$$\vec{\sigma} = 10 \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{101}}(8,1,6)\right]$$

$$\boxed{\vec{\sigma} = -\frac{10}{\sqrt{101}}(8,1,6)}$$

04

$$\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{PA}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-9+12) + 1(-2-18)$$

$$= 3 + (-20) = -13 \neq 0,$$ r e s são reversas!

c) $$d(r,s) = \frac{|\vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{PA})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(-1-2) + \hat{y}(2-0) + \hat{z}(0-2)$$

$$= (-3, 2, -2)$$

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{13}{\sqrt{17}}}$$

03. $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

a) $4x^2-8x+9y^2-36y+4=0$

$$4(x^2-2x)+9(y^2-4y)+4=0$$

$$4(x^2-2x+1-1)+9(y^2-4y+4-4)+4=0$$

$$4(x-1)^2-\cancel{4}+9(y-2)^2-36+\cancel{4}=0$$

$$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36 \quad \div 36$$

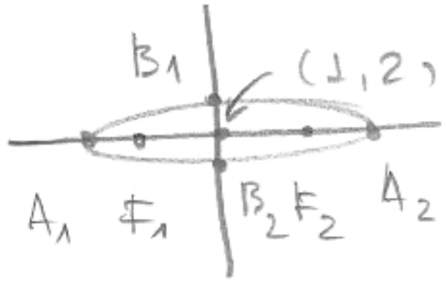
$$\boxed{\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1}$$ Elipse!

b) $a=3,\ b=2$

$$a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=9-4=5$$

$$c=\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}.}$$ Excentricidade

06



$(1,2) = (x_c, y_c)$

$\boxed{C(1,2)}$

$A_1(x_c - a, y_c) \Rightarrow \boxed{A_1(-2,2)}$

$A_2(x_c + a, y_c) \Rightarrow \boxed{A_2(4,2)}$

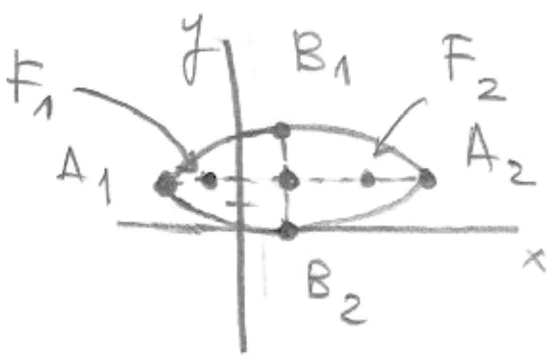
$B_1(x_c, y_c + b) \Rightarrow \boxed{B_1(1,4)}$

$B_2(x_c, y_c - b) \Rightarrow \boxed{B_2(1,0)}$

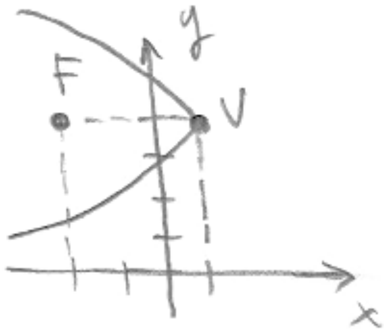
$F_1(x_c - c, y_c) \Rightarrow \boxed{F_1(1-\sqrt{5},2)}$

$F_2(x_c + c, y_c) \Rightarrow \boxed{F_2(1+\sqrt{5},2)}$

c)



04.



$F(-2,4,0)$

$V(1,4,0)$

$d(F,V) = \sqrt{3^2} = 3$

$d(F,V) = |p|/2$

$|p| = 6$

Como a concavidade está para $x<0 \Rightarrow p<0$

$$\boxed{p = -6}$$

$(y-y_v)^2 = 2p(x-x_v)$, equação da parábola

$$\boxed{\begin{cases} (y-4)^2 = -12(x-1) \\ z \text{ livre} \end{cases}}$$ Equação da superfície.

b)