Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
8 de julho de 2013
Geometria Analítica - 1° Semestre 2013 – Exame Final

Nome:____
ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS.

01. (3,0 pontos) Considere os vetores $\vec{v} = (1, -1, 2)$, $\vec{u} = (0, 1, -2)$ e $\vec{w} = (2, 1, -1)$ e os pontos $A(1, 3, 2)$ e $B(2, -1, 2)$.

a) (0,5) Determine o valor do produto misto $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})$.
b) (0,5) Obtenha o valor do ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$.
c) (1,0) Calcule o vetor $\vec{\lambda}$ sabendo que $(\vec{v} \cdot \vec{u})\vec{\lambda} = \vec{v} + 2\vec{w} - \overrightarrow{AB}$.
d) (1,0) Obtenha o vetor $\vec{\sigma} = [\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})]\hat{\lambda}$.

02. (2,0) Considere a reta $r: X = (2, 1, 0) + t(-1, 2, 3)$, com $t \in \mathbb{R}$ e o ponto $P(-1, 3, 1)$.

a) (1,0) Determine a equação cartesiana do plano π_1 que contém P e r.
b) (1,0) Determine a equação cartesiana do plano π_2 que passa por P e é perpendicular a r.

03. (3,0 pontos) Considere a cônica de equação

$$7x^2 - 9y^2 + 28x + 54y - 116 = 0.$$

a) (1,0) Obtenha a equação reduzida da cônica e faça a sua identificação.
b) (1,0) Determine todos os elementos desta cônica.
c) (1,0) Faça um esboço identificando os elementos encontrados.

04. (2,0 pontos) Considere a superfície quádrica de equação

$$-4x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 0$$

a) (1,0) Determine as curvas de interseção da superfície com os planos coordenados. Caso não haja interseção com algum desses planos ou a interseção resulte em um ponto, especifique as condições para que planos paralelos a estes cortem a superfície e identifique as curvas de interseção.
b) (1,0) Faça um esboço da quádrica.

GEOMETRIA ANALITICA – 2013.1

EXAME FINAL

RESOLUÇÃO

#01. a) $\vec{v} = (1,-1,2)$

$\vec{u} = (0,1,-2)$

$\vec{w} = (2,1,-1)$

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1+2) - 1(-4-0) + 2(0-2)$$

$$= 1 + 4 - 4 = 1$$

$$\boxed{\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w}) = 1}$$

b) $\vec{v}\cdot\vec{u} = |\vec{v}||\vec{u}|\cos\theta$

$1.0 + (-1).1 + 2(-2) = -1-4 = -5$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{6}$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

$\longrightarrow$

02

$$-5 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos\theta$$

$$-\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{6}\cos\theta \Rightarrow -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \cos\theta$$

$$\boxed{\theta = \arccos\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)}$$

c) $\vec{v} \cdot \vec{u} = -5$

$2\vec{w} = (4,2,-2)$

$\vec{AB} = B - A = (1,-4,0)$

$$-5\vec{\lambda} = (1,-1,2) + (4,2,-2) - (1,-4,0)$$

$$-5\vec{\lambda} = (5,1,0) - (1,-4,0)$$

$$-5\vec{\lambda} = (4,5,0) \Rightarrow \boxed{\vec{\lambda} = \left(-\frac{4}{5}, -1, 0\right)}$$

d) $\hat{\lambda} = \dfrac{\vec{\lambda}}{|\vec{\lambda}|}$, $|\vec{\lambda}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + (-1)^2}$

$$= \sqrt{\frac{16+25}{25}}$$

→

$$|\vec{\lambda}| = \sqrt{\frac{41}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{41}$$

$$\hat{\lambda} = \left(-\frac{4}{5}, -1, 0\right) / \sqrt{41}/5$$

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{41}}(-4, -5, 0)$$

$$\vec{\sigma} = [\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{w})]\,\hat{\lambda}$$

$$\vec{\sigma} = 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{41}}(-4, -5, 0)$$

$$\boxed{\vec{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{41}}(-4, -5, 0)}$$

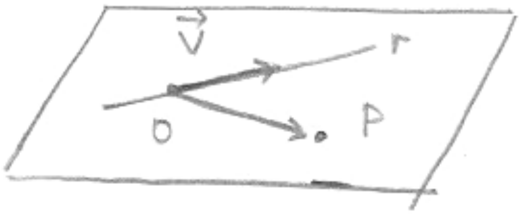
#02

$$r: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

$\vec{v} = (-1, 2, 3)$

vetor diretor da reta r

04



$O : r(t=0)$

$x_0 = 2$

$y_0 = 1$

$z_0 = 0$

$\vec{v} \times \vec{OP} = \vec{n}$

vetor diretor
do plano π_1

$$\vec{OP} = P - O = (-1, 3, 1) - (2, 1, 0)$$

$$= (-3, 2, 1)$$

$$\vec{v} \times \vec{OP} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{x}(2-6) + \hat{y}(-9+1) + \hat{z}(-2+6)$$

$= (-4, -8, 4) \Rightarrow \vec{m} = -\frac{1}{4}\vec{n}$ também é vetor diretor de π_1 e é mais simples.

$$\vec{m} = (1, 2, -1)$$

Equação do plano: $ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n} = (1, 2, -1)$, $a = 1$

$b = 2$

$c = -1$

$\pi_1: x + 2y - z + d = 0$

Mas $P \in \pi_1$, logo: $-1 + 2(3) - 1 + d = 0$

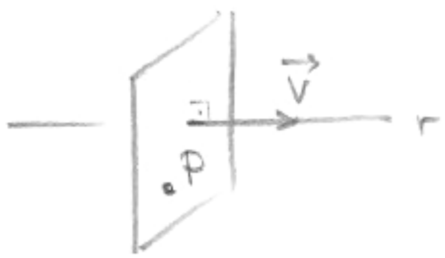
$-1 + 6 - 1 + d = 0$

$d = -4$

$$\boxed{\pi_1: x + 2y - z - 4 = 0}$$

b) Se é perpendicular à r, então $\vec{v}$ pode ser o seu vetor diretor

$\pi_2: \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$



$\vec{v} = (-1, 2, 3)$

$\alpha = -1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$

$\pi_2: -x + 2y + 3z + \delta = 0$

Mas $P \in \pi_2$, logo: $-(-1) + 2.3 + 3.1 + \delta = 0$

$$+1 + 6 + 3 + \delta = 0$$

$$\delta = -10$$

$$\boxed{\pi_2: -x + 2y + 3z - 10 = 0}$$

\#03. a) $7x^2 - 9y^2 + 28x + 54y - 116 = 0$

$$7x^2 + 28x - 9y^2 + 54y - 116 = 0$$

$$7(x^2 + 4x) - 9(y^2 - 6y) - 116 = 0$$

$$7(x^2 + 4x + 4 - 4) - 9(y^2 - 6y + 9 - 9) - 116 = 0$$

$$7(x+2)^2 - 28 - 9(y-3)^2 + 81 - 116 = 0$$

$$7(x+2)^2 - 9(y-3)^2 = 63$$

$$\frac{7}{63}(x+2)^2 - \frac{9}{63}(y-3)^2 = 1$$

$$\boxed{\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{7} = 1}$$

Hipérbole

eixo real // ao eixo x.

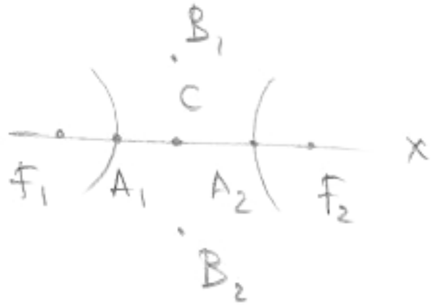
b) Centro: $\boxed{C(-2,3)}$

$a = 3$, $b = \sqrt{7}$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 7 = 16$

$c = 4$

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{e = \frac{4}{3}}$



$A_1(x_c - a, y_c)$

$\boxed{A_1(-5,3)}$

$A_2(x_c + a, y_c) \Rightarrow \boxed{A_2(1,3)}$

$B_1(x_c, y_c + b) \Rightarrow \boxed{B_1(-2, 3+\sqrt{7})}$

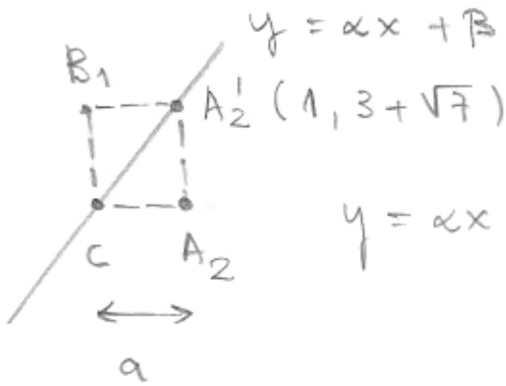
$B_2(x_c, y_c - b) \Rightarrow \boxed{B_2(-2, 3-\sqrt{7})}$

08

$$F_1(x_c - c,\ y_c) \Rightarrow \boxed{F_1(-6, 3)}$$

$$F_2(x_c + c,\ y_c) \Rightarrow \boxed{F_2(2, 3)}$$

Assíntotas:



$$y = \alpha x + \beta$$

$$C:\quad 3 = \alpha(-2) + \beta \Rightarrow \quad -2\alpha + \beta = 3$$

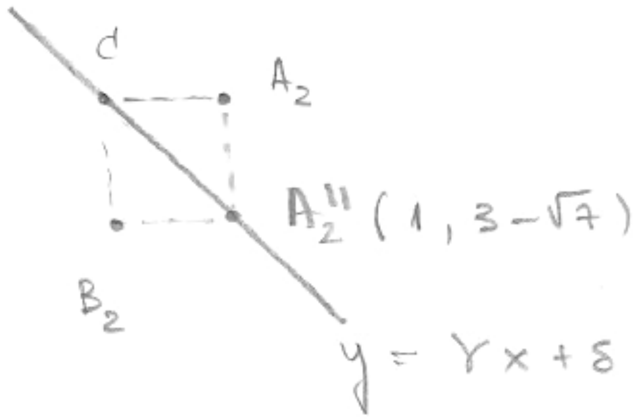
$$A_2':\quad 3+\sqrt{7} = \alpha + \beta \Rightarrow \quad \alpha + \beta = 3+\sqrt{7} \quad (-1) \quad \oplus$$

$$-3\alpha = -\sqrt{7}$$

$$\alpha = \sqrt{7}/3 \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{3} + \beta = 3 + \sqrt{7}$$

$$\beta = 3 + \sqrt{7} - \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{9+2\sqrt{7}}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{7}}{3}x + \frac{9+2\sqrt{7}}{3}}$$



$$d: \quad -2\gamma + \delta = 3 \quad \Rightarrow \quad -2\gamma + \delta = 3$$

$$A_2'': \quad 3-\sqrt{7} = \gamma + \delta \quad \Rightarrow \quad \gamma + \delta = 3 - \sqrt{7} \quad (-1) \quad \oplus$$

$$-3\gamma = \sqrt{7}$$

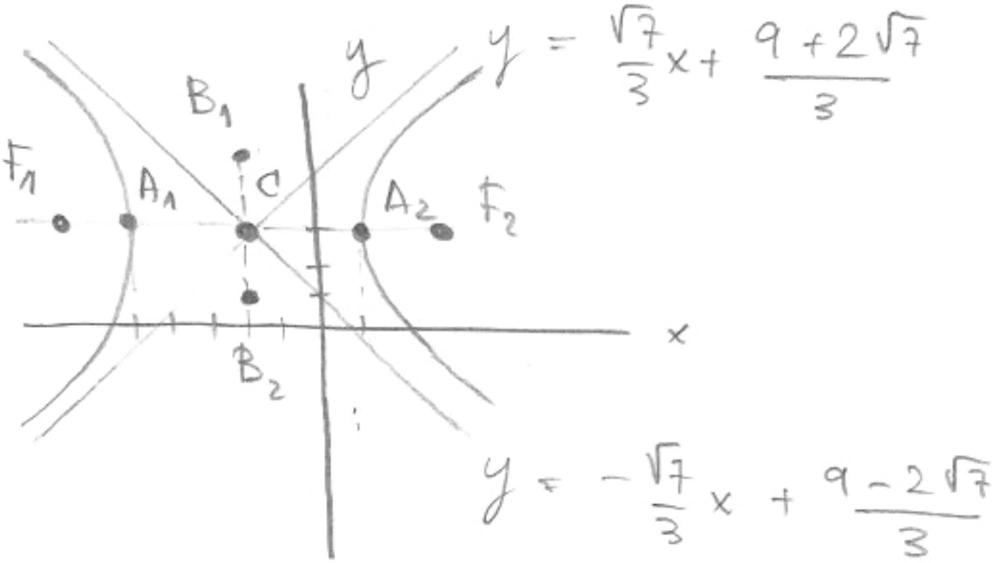
$$\gamma = -\frac{\sqrt{7}}{3} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{7}}{3} + \delta = 3 - \sqrt{7}$$

$$\delta = 3 - \sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{9 - 2\sqrt{7}}{3}$$

$$\boxed{y = -\frac{\sqrt{7}}{3} x + \frac{9-2\sqrt{7}}{3}}$$

10

c)



04.

$$-4x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 0 \qquad \div(-4)$$

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$$

a) $x = 0 \Rightarrow y = \pm 2z$: retas!

$y = 0 \Rightarrow x = \pm 2z$: retas!

$z = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow x = 0,\ y = 0$: ponto!

$z = k \Rightarrow x^2 + y^2 = 4k^2$: circunferências!

b)