Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
10 de maio de 2013
Mecânica 2 - 1° Semestre 2013 – 1ª Prova

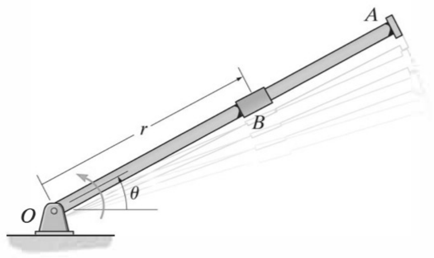
Nome:____

ATENÇÃO: Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI). Considere g = 10 m/s^2.

01. (2,5 pontos) A barra OA está girando no sentido anti-horário com uma velocidade angular

$$\dot{\vec{\theta}}(t) = (3t^2)\hat{\theta},$$

logo após ter partido do repouso da posição $\theta(t = 0) = \pi/6\, rad$. O colar B se move através da barra por meios mecânicos com uma velocidade radial

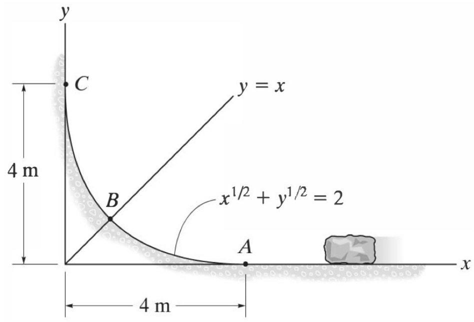


$$\dot{\vec{r}}(t) = (4t)\hat{r},$$

onde $\vec{r}(0) = 1\, m$. O movimento está contido em um plano vertical. Desprezando os efeitos gravitacionais sobre o sistema, determine em função do tempo:

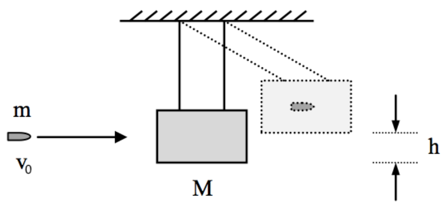
a) (1,0) a posição radial e angular do colar, ou seja, $\vec{r}(t)$ e $\vec{\theta}(t)$, respectivamente;
b) (1,0) a velocidade e a aceleração do colar.
c) (0,5) Calcule o instante de tempo em que $|\vec{r}(t)| = 5\, m$.
Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z},\ a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},\ a_z = \ddot{z}$.

02. (3,0 pontos) Uma pedra de massa $m = 20\, kg$ possui uma velocidade no ponto A igual a $v_A = 8\, m/s$, horizontal, imediatamente antes de deslizar pela curva $x^{1/2} + y^{1/2} = 2$. Despreze os efeitos do atrito e as dimensões da pedra. Sabendo que o ponto B é a interseção da curva anterior com a reta $y = x$, determine para o ponto B:



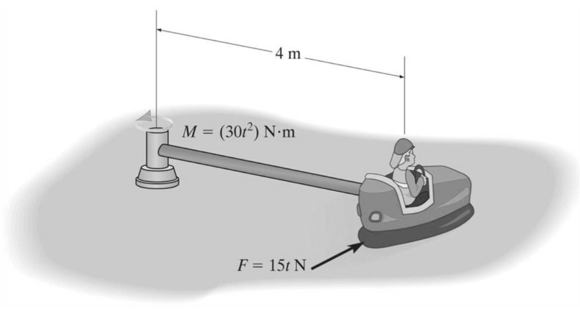
a) (0,5) as suas coordenadas, ou seja, (x_B, y_B);
b) (1,0) o raio de curvatura da trajetória, ρ_B;
c) (1,0) o módulo da velocidade da pedra, v_B;
d) (0,5) o módulo da reação normal sobre a pedra, N_B.

03. (2,0 pontos) O pêndulo balístico é utilizado para medir a velocidade de projéteis de armas de fogo. Este dispositivo consiste de um bloco de madeira, de massa M, suspenso por fios, conforme mostrado na figura ao lado. Um projétil de massa m é disparado contra o bloco com velocidade horizontal desconhecida v_0. O projétil aloja-se no bloco de madeira após a colisão.



a) (1,0) Sabendo que o conjunto projétil + bloco sobe uma altura máxima h, determine o valor de v_0 em função dos parâmetros do problema.
b) (1,0) Calcule a energia dissipada na colisão.

04. (2,5 pontos) Uma barra de massa desprezível está submetida a um momento de binário $\vec{M}(t) = (30t^2)\hat{z}$ quando presa a um pequeno veículo. O motor do veículo o impulsiona com uma força tangencial na forma $\vec{F}(t) = (15t)\hat{\theta}$. A massa total do veículo com passageiro é igual a $150\, kg$. Sabendo que o carro está em repouso em $t = 0$, determine:



a) (1,0) o torque resultante sobre o carro em função do tempo;
b) (1,0) o momento angular do carro em função do tempo;
c) (0,5) o módulo da velocidade do carro no instante $t = 5\, s$.

Mecânica 2 – 2013.1

1ª Prova

Resolução

#01. a) $\dot{r}(t) = 4t \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = 4t \Rightarrow \int_{r_0}^{r} dr' = \int_0^t 4t'\,dt'$

$$r - r_0 = \frac{4t^2}{2} \Rightarrow r(t) = r_0 + 2t^2$$

Mas $r(0) = 1m \Rightarrow r(0) = r_0 + 4.0 = 1 \Rightarrow r_0 = 1m$

$$\boxed{\vec{r}(t) = (2t^2+1)\,\hat{r}}$$

$$\dot{\theta}(t) = 3t^2 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = 3t^2 \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \int_0^t 3t'^2\,dt'$$

$$\theta - \theta_0 = \frac{3t^3}{3} \Rightarrow \theta(t) = t^3 + \theta_0$$

$$\theta(t=0) = \pi/6 \Rightarrow \theta_0 = \pi/6 \Rightarrow \boxed{\vec{\theta}(t) = (t^3 + \pi/6)\,\hat{\theta}}$$

b) $\vec{v}(t) = v_r(t)\,\hat{r} + v_\theta(t)\,\hat{\theta} + v_z(t)\,\hat{z}$, $v_z(t) = 0$

$v_r(t) = \dot{r} = 4t$, $v_\theta = \dot{\theta} r = 3t^2(2t^2+1)$

$$\boxed{\vec{v}(t) = 4t\,\hat{r} + (3t^2 + 6t^4)\,\hat{\theta}}$$

02

$\vec{a}(t) = a_r(t)\hat{r} + a_\theta(t)\hat{\theta} + a_z(t)\hat{z}$, $a_z(t) = 0$

$a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$, $\dot{r} = 4t$, $\ddot{r} = 4$, $r = 2t^2+1$

$a_r = 4 - (2t^2+1)(3t^2)^2 = 4-(2t^2+1)(9t^4)$

$a_r = 4 - 18t^6 - 9t^4$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $\dot{\theta} = 3t^2$, $\ddot{\theta} = 6t$

$a_\theta = (2t^2+1)(6t) + 2(4t)(3t^2)$

$a_\theta = 12t^3 + 6t + 8t \cdot 3t^2 = 12t^3 + 6t + 24t^3$

$a_\theta = 36t^3 + 6t$

$$\boxed{\vec{a}(t) = (-18t^6 - 9t^4 + 4)\hat{r} + (36t^3+6t)\hat{\theta}}$$

c) $r(t) = 2t^2+1 = 5 \Rightarrow 2t^2 = 4 \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{2}\ s}$

#02. 1) Coordenadas do ponto B: $y = x$

$x^{1/2} + y^{1/2} = 2$, $y = x$ (interseção das curvas)

$x^{1/2} + x^{1/2} = 2$

$2x^{1/2} = 2 \Rightarrow x^{1/2} = 1 \Rightarrow \boxed{x_B = 1\,m}$

Como em B $y=x \Rightarrow \boxed{y_B = 1\,m}$

b) $$\rho = \frac{\left[1+\left(dy/dx\right)^2\right]^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|}$$

$$x^{1/2}+y^{1/2}=2 \Rightarrow y^{1/2} = 2-x^{1/2} \Rightarrow y=\left(2-x^{1/2}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(2-x^{1/2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1/2} = \frac{\left(x^{1/2}-2\right)}{x^{1/2}}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_B=1} = \frac{(1-2)}{1} = -1.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1/2\, x^{-1/2}\cdot x^{1/2} - 1/2\, x^{-1/2}\left(x^{1/2}-2\right)}{x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1-1+2x^{-1/2}}{x}\right] = \frac{x^{-1/2}}{x}$$

$$= x^{-3/2}, \quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_B=1} = 1.$$

$$\rho_B = \rho(x=x_B) = \frac{\left[1+(-1)^2\right]^{3/2}}{1} = 2^{3/2}$$

$$\boxed{\rho_B = 2\sqrt{2}\ \text{m}}$$

c) Como não há atrito: $\Delta K + \Delta U = 0$

$$K_i + U_{g_0} = K_f + U_{gf} \Rightarrow K_A + U_{gA} = K_B + U_{gB}$$

$$\frac{\cancel{m} v_A^2}{2} + \cancel{m} g y_A = \frac{\cancel{m} v_B^2}{2} + \cancel{m} g y_B \quad , \quad y_A = 0$$

$$\frac{v_A^2}{2} = \frac{v_B^2}{2} + g y_B \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 - 2 g y_B$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2 g y_B}$$

$$v_B = \sqrt{64 - 20} \Longrightarrow \boxed{v_B = 2\sqrt{11}\ \text{m/s}}$$

d)

$$N_B - mg\cos\theta_B = \frac{m v_B^2}{\rho_B}$$

$$\tan\theta_B = \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \theta_B = 45^\circ$$

$$\boxed{N_B = m\left(\frac{v_B^2}{\rho_B} + g\cos\theta_B\right)}$$

$\rightarrow$

$$N_B = 20\left(\frac{44}{2\sqrt{2}} + 10\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{20}{2}\left(\frac{44\sqrt{2}}{2} + 10\sqrt{2}\right)$$

$$N_B = 10\,(22\sqrt{2}+10\sqrt{2}) = 10\cdot\sqrt{2}\,(32)$$

$$\boxed{N_B = 320\sqrt{2}\ N}$$

#03. a) $\vec{P}_i = \vec{P}_f$

$$m v_0 + M\cdot 0 = (m+M)V$$

Utilizando a conservação da energia após a colisão:

$$\frac{\cancel{(m+M)}V^2}{2} = \cancel{(m+M)}gh \Rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

Portanto, $m v_0 = (m+M)V = (m+M)\sqrt{2gh}$

$$\boxed{v_0 = \left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{2gh}}$$

06

b) $\Delta E = \Delta K = K_f - K_i$

$$\Delta E = \frac{(m+M)V^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2}$$

$$= \frac{(m+M)}{\cancel{2}}(\cancel{2}gh) - \frac{m}{\cancel{2}}\left(1+\frac{M}{m}\right)^2 \cancel{2}gh$$

$$= (m+M)gh - m\left(\frac{m+M}{m}\right)^2 gh$$

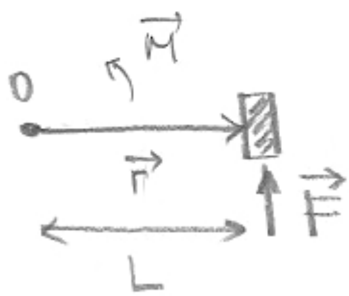
$$= (m+M)gh - \frac{(m^2+2mM+M^2)}{m}gh$$

$$= \cancel{mgh} + Mgh - \cancel{mgh} - 2Mgh - \frac{M^2}{m}gh$$

$$= ghM\left(1-2-\frac{M}{m}\right) = ghM\left(-\frac{M}{m}-1\right)$$

$$\boxed{\Delta E = -Mgh\left(1+\frac{M}{m}\right)}$$

#04. a) $\vec{M}_R = \vec{M} + \vec{r} \times \vec{F}$



$\vec{r} = L\hat{r}$

$$\vec{M}_R(t) = (30t^2)\hat{z} + L\hat{r} \times (15t)\hat{\theta}$$

$$\vec{M}_R(t) = 30t^2\hat{z} + 15.Lt\underbrace{(\hat{r}\times\hat{\theta})}_{\hat{z}}$$

$$\boxed{\vec{M}_R(t) = (30t^2 + 60t)\hat{z}}$$

b) $\Delta\vec{H}_o(t) = \int \vec{M}_R(t)\,dt$

$\vec{H}_o(t) = \vec{r}\times m\vec{v}(t)$, $\vec{v}(t=0) = 0 \Rightarrow \vec{H}_o(0) = 0$

$$\Delta\vec{H}_o = \vec{H}_{of}(t) - \underbrace{\cancel{\vec{H}_{oi}(t)}}_{0} = \vec{H}_{of}(t) = \vec{H}_o(t)$$

$$\vec{H}_o(t) = \int_0^t \vec{M}_R(t)\,dt = \int_0^t (30t'^2 + 60t')\,dt'\,\hat{z}$$

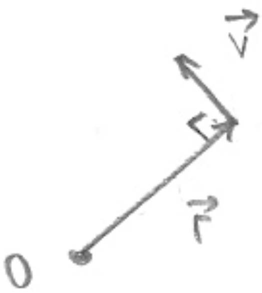
$$\vec{H}_o(t) = \left(30\frac{t^3}{3} + 60\frac{t^2}{2}\right)\hat{z}$$

$$\boxed{\vec{H}_o(t) = (10t^3 + 30t^2)\hat{z}}$$

c) $|\vec{H}_o(5)| = |10.5^3 + 30.5^2| = |\vec{r}\times m\vec{v}(5)|$

$= |\vec{r}||m\vec{v}|\operatorname{sen}(\vec{r},\vec{v}) = LmV$

$\Rightarrow (10.5 + 30)\cancel{5^2} = 4.1\overset{6}{\cancel{8}}0.V$



$\longrightarrow$

08

$$50 + 30 = 24v \quad , \quad v = v(t = 5s)$$

$$v = \frac{80}{24} = \frac{10}{3}$$

$$\boxed{v = 10/3 \ m/s}$$