

Nome: _____

ATENÇÃO:

Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).

Nos problemas de resolução numérica considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

01. (4,0 pontos) A barra-guia AB está girando no sentido anti-horário de maneira que o pino C gira com um raio descrito pela equação

$$r(t) = 3\theta/2 \text{ m},$$

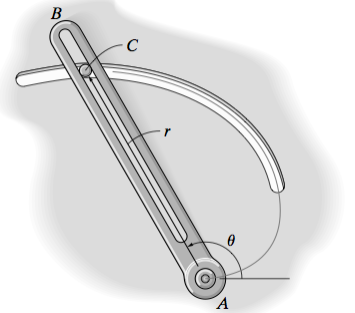
onde θ está medido em radianos. O braço-guia parte do repouso em um ângulo $\theta = 60^\circ$ e é girado com uma velocidade angular na forma

$$\dot{\theta}(t) = (4t) \text{ rad/s},$$

onde o tempo está em segundos. O movimento está contido em um plano vertical. Desprezando os efeitos gravitacionais sobre o sistema, determine em função do tempo:

- (1,0) a posição radial e angular do pino, ou seja, $r(t)$ e $\theta(t)$, respectivamente;
- (1,0) a velocidade do pino em função do tempo $\vec{v}(t)$;
- (1,0) a aceleração do pino em função do tempo $\vec{a}(t)$;
- (1,0) Calcule os módulos da velocidade e da aceleração do pino em $t = 1,0 \text{ s}$.

Dados: $\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} + a_z \hat{z}$, $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $a_z = \ddot{z}$.

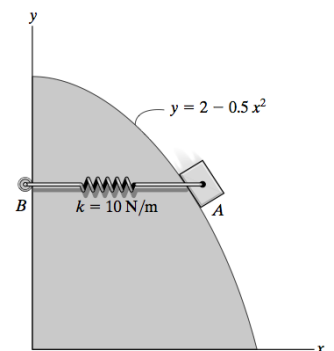


02. (3,5 pontos) O bloco de massa $m = 5 \text{ kg}$ mostrado na figura pode se mover apenas no plano xy sobre o caminho parabólico de equação $y = 2 - 0,5x^2$. Uma mola ideal de constante elástica $k = 10 \text{ N/m}$ está presa ao bloco no ponto A e a um guia B de forma que ela permanece na horizontal enquanto o bloco se move. O comprimento original da mola é igual a $0,5 \text{ m}$. Desprezando os efeitos do atrito, determine para $x = 1,0 \text{ m}$:

- (1,0) o raio de curvatura da trajetória;
- (0,5) o módulo da força elástica sobre o bloco;
- (1,0) o diagrama de corpo isolado das forças que atuam no bloco.

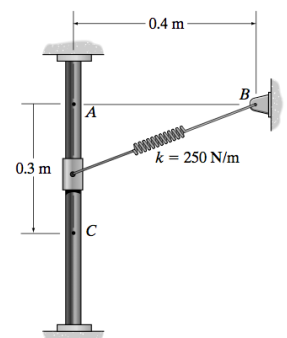
Sabendo que em $x = 1,0 \text{ m}$ o módulo da velocidade do bloco é igual a $4,0 \text{ m/s}$, calcule:

- (0,5) o módulo da reação normal sobre bloco;
- (0,5) o módulo da aceleração tangencial do bloco.



03. (2,5 pontos) Uma argola de massa $m = 5,0 \text{ kg}$ pode deslizar ao longo de um guia vertical quando conectada com uma mola conforme ilustra a figura. O comprimento original da mola de constante elástica $k = 250 \text{ N/m}$ é igual a $\ell_0 = 0,3 \text{ m}$. A argola é abandonada do ponto A em $t = 0$ e segue em direção ao ponto C . Sabendo que a gravidade local vale possui módulo $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ que aponta verticalmente para baixo e que o trabalho da força de atrito no trajeto AC possui módulo igual a $1,25 \text{ joules}$, determine:

- (0,5) A energia mecânica da argola quando ela está no ponto A ;
- (1,0) A energia elástica da mola quando a argola está no ponto C ;
- (1,0) A velocidade da argola no ponto C .



Mecânica 2 - 2018.2

1ª Prova - Resolução

#01. 1) $r(t) = \frac{3}{2} \theta(t)$

$$\theta(t) = ? \quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = 4t \Rightarrow \int d\theta = \int 4t dt$$

$$\int_{\theta(0)}^{\theta(t)} d\theta' = \int_0^t 4t' dt' \Rightarrow \theta(t) - \theta(0) = 4 \frac{t^2}{2}$$

$$\theta(t) = \theta_0 + 2t^2, \quad \theta_0 = 60^\circ = \pi/3$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{\pi}{3} + 2t^2}$$

$$\boxed{r(t) = \frac{\pi}{2} + 3t^2}$$

$$\swarrow r = \frac{3}{2} \theta$$

b) $\vec{v}(t) = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + \dot{z} \hat{z}, \quad \dot{z} = 0$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = 6t$$

$$\dot{\theta} = 4t$$

$$\vec{v}(t) = 6t \hat{r} + \left(\frac{\pi}{2} + 3t^2 \right) 4t \hat{\theta} + 0 \hat{z}$$

→

02.

$$\vec{v}(t) = 6t \hat{r} + (2\pi t + 12t^3) \hat{\theta}$$

$$c) a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = 6 - \left(\frac{\pi}{2} + 3t^2\right)(16t^2)$$

$$a_r = 6 - (8\pi t^2 + 48t^4)$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \left(\frac{\pi}{2} + 3t^2\right) \cdot 4t + 2 \cdot 6t \cdot 4t$$

$$a_\theta = 48t^2 + 2\pi t + 12t^3$$

$$a_z = \ddot{z} = 0$$

$$\vec{a}(t) = (6 - 8\pi t^2 - 48t^4) \hat{r} + (48t^2 + 2\pi t + 12t^3) \hat{\theta}$$

$$d) |\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

$$\vec{v}(t=1) = 6 \hat{r} + (2\pi + 12) \hat{\theta}$$

$$|\vec{v}(1s)| = \sqrt{36 + (2\pi + 12)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 4\pi^2 + 48\pi + 144}$$

$$= \sqrt{180 + 4\pi^2 + 48\pi}$$

Usando $\pi \approx 3$:

$$|\vec{v}(1s)| \simeq \sqrt{180 + 36 + 144} = \sqrt{360}$$

$$|\vec{v}(1s)| \simeq 6\sqrt{10} \text{ m/s}$$

$$\vec{a}(t=1s) = (6 - 8\pi - 48)\hat{r} + (48 + 2\pi + 12)\hat{\theta}$$

$$|\vec{a}(1s)| = \sqrt{(6 - 8\pi - 48)^2 + (60 + 2\pi)^2}$$

Usando $\pi \simeq 3$:

$$|\vec{a}(1s)| \simeq \sqrt{(-66)^2 + (66)^2}$$

$$= \sqrt{2 \cdot (66)^2}$$

$$= 66\sqrt{2}$$

$$|\vec{a}(1s)| = 66\sqrt{2} \text{ m/s}$$

02. a) $y(x) = 2 - 0,5x^2$

$$\frac{dy}{dx} = -x, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -1$$

→

04

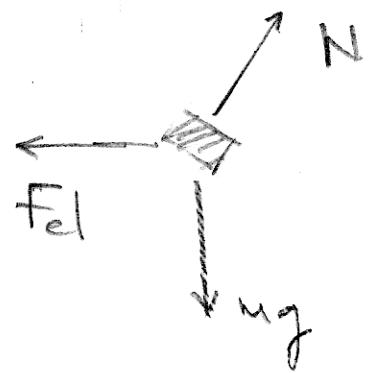
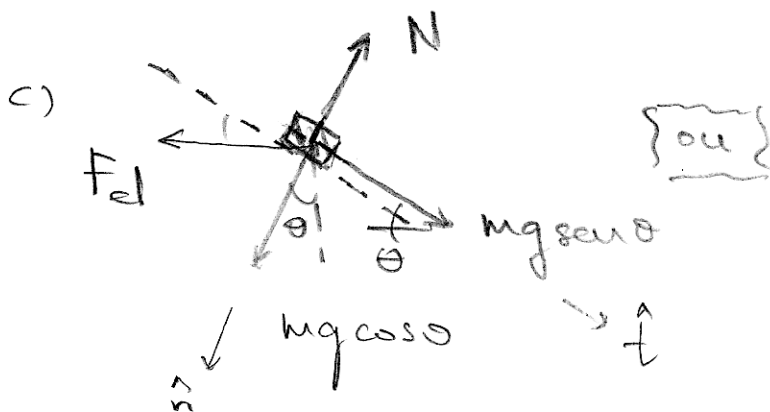
$$\rho(x_0) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\left| \frac{d^2y}{dx^2} \right|} \quad \downarrow x_0$$

$$\rho(x) = \frac{[1 + x^2]^{3/2}}{|-1|} = [1 + x^2]^{3/2}$$

$$x = 1 \Rightarrow \rho(1) = 2^{3/2} = \sqrt{2^3} = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$\boxed{\rho(x=1,0\text{m}) = 2\sqrt{2} \text{ m}}$$

$$b) |F_{el}| = k(x - l_0) = 10(1 - 0,5) \Rightarrow \boxed{|F_{el}| = 5 \text{ N}}$$



$$d) \quad mg \cos \theta + F_{el} \sin \theta - N = m \frac{v^2}{\rho} \quad (\text{directed normal } \hat{n})$$

$$N = mg \cos \theta + F_{el} \sin \theta - m \frac{v^2}{\rho}$$

→

$$\theta = ? \quad \tan \theta = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$N = mg \cos 45^\circ + f_{el} \sin 45^\circ - m \frac{v^2}{\rho}$$

$$N = 5 \cdot 10 \frac{\sqrt{2}}{2} + 5 \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \frac{16^8}{2\sqrt{2}}$$

$$N = 55 \frac{\sqrt{2}}{2} - 40 \frac{\sqrt{2}}{2} = 15 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

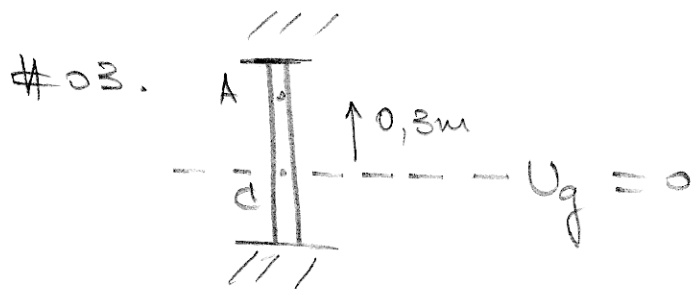
$$\boxed{N = 15\sqrt{2}/2 \text{ N}}$$

c) $mg \sin \theta - f_{el} \cos \theta - f_{et} = ma_t$ (directed tangential $\hat{t}$)

$$a_t = g \sin \theta - \frac{f_{el}}{m} \cos \theta, \quad \theta = 45^\circ$$

$$a_t = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_t = \frac{9}{2} \sqrt{2} \text{ m/s}^2}$$



$$a) E_{\text{mech}A} = K_A + U_A = K_A + U_{\text{el}A} + U_{gA}$$

$$= 0 + \frac{k}{2} (x_A - l_0)^2 + mgy_A$$

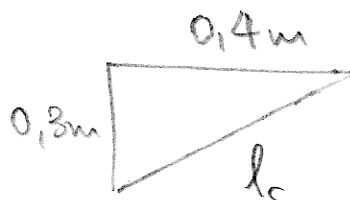
$$= 125 (0,1)^2 + 50 \cdot 0,3$$

$$= 125 \cdot 10^{-2} + 15 = 1,25 + 15$$

$$E_{\text{mech}A} = 16,25 \text{ J}$$

$$b) U_{\text{el}c} = \frac{k}{2} (l_c - l_0)^2$$

$$l_c = ?$$



$$l_c = \sqrt{(3 \cdot 10^{-1})^2 + (4 \cdot 10^{-1})^2} = \sqrt{25 \cdot 10^{-2}}$$

$$l_c = 5 \cdot 10^{-1} \Rightarrow l_c = 0,5 \text{ m}$$



$$U_{elc} = 125 (0,5 - 0,3)^2 = 125 (0,2)^2$$

$$U_{elc} = 125 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 5 \text{ J}$$

$$\boxed{U_{elc} = 5 \text{ J}}$$

$$c) \quad \Delta E_{mec} = W_{fat}$$

$$K_c - K_A + U_c - U_A = W_{fat}$$

$$K_c = \cancel{K_A} + U_A - U_c + W_{fat}$$

$$\rightarrow -1,25 \text{ J}$$

$$K_c = U_{elA} + U_{gA} - (U_{elc} + \cancel{U_{gc}}) + W_{fat}$$

$$K_c = \cancel{1,25} + 15 - 5 - \cancel{1,25}$$

$$K_c = 10 \text{ J} \Rightarrow \frac{m v_c^2}{2} = 10$$

$$\frac{5}{2} v_c^2 = 10 \Rightarrow \boxed{v_c = 2,0 \text{ m/s}}$$