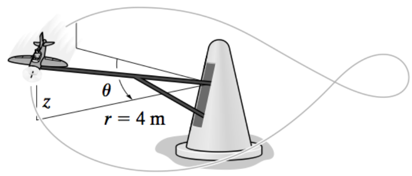
Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
24 de abril de 2014
Mecânica 2 - 1° Semestre 2014 – 1ª Prova

Nome:____

ATENÇÃO:
Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).
Nos problemas de resolução numérica considere g = 10 m/s^2.

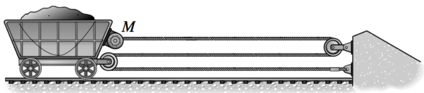
01. (3,0 pontos) Um pequeno avião de um parque de diversões se move ao longo de uma trajetória de equações $r = 4\ m$, $\theta = 0{,}2t$ e $z = 0{,}5\ cos\theta$. Determine:



a) (1,0) a velocidade do avião em função do tempo;
b) (1,0) a aceleração do avião em função do tempo;
c) (1,0) os módulos da velocidade e da aceleração do avião para $t = 5\pi\ s$.

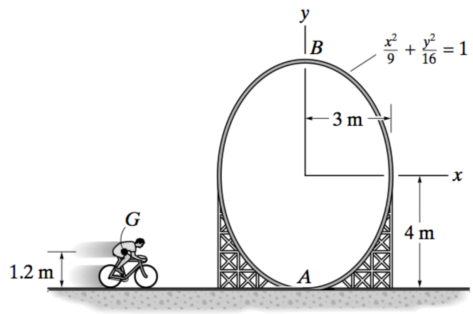
Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z},\ a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},\ a_z = \ddot{z}$.

02. (3,5 pontos) Um carro de mineração de massa $m = 150\ kg$ é puxado, em $t = 0$, a partir do repouso por um motor M montado sobre o carro. O motor exerce uma tensão variável sobre o fio na forma $F = 150t^{1/2}$. Despreze as perdas por atrito e considere que a gravidade local é igual a $g = 10\ m/s^2$ e aponta verticalmente para baixo.



a) (1,0) Faça um diagrama de corpo isolado para o carro e escreva as suas equações de movimento;
b) (0,5) Calcule a aceleração do carro em $t = 4\ s$;
c) (1,0) Calcule a velocidade do carro em função do tempo;
d) (1,0) Determine a potência associada ao movimento do carro em $t = 4\ s$.

03. (3,5 pontos) Um ciclista tenta realizar uma volta completa em uma pista vertical em formato elíptico, conforme ilustra a figura. A massa do ciclista é igual a $81\ kg$ e seu centro de massa G está posicionado a uma altura de $h = 1{,}2\ m$ do solo. Sabendo que a velocidade do ciclista no ponto A, horizontal e de módulo v_A, é a menor possível para que o circuito completo consiga ser feito, determine:



a) (1,0) o raio de curvatura para o ponto G na posição B da trajetória;
b) (1,0) a equação de movimento do ponto G ao longo da direção normal no ponto B;
c) (1,0) o módulo da velocidade do ciclista no ponto B;
d) (0,5) o valor de v_A.

Despreze os efeitos da resistência do ar e considere que a gravidade local vale $g = 10m/s^2$ e aponta verticalmente para baixo.

MECÂNICA 2

2014.1 FD

1ª PROVA

#01. $r = 4$

$\theta = 0{,}2t$

$z = \frac{1}{2}\cos\theta$

a) $\vec{v} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} + v_z\hat{z}$

$v_r = \dot{r} = 0$

$v_\theta = r\dot{\theta} = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$

$v_z = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta \cdot 0{,}2$

$v_z = -\,0{,}1\operatorname{sen} 0{,}2t$

$$\boxed{\vec{v}(t) = [0{,}8\,\hat{\theta} - 0{,}1\operatorname{sen}(0{,}2t)\,\hat{z}]\ m/s}$$

b) $a_r = \ddot{r} - r(\dot{\theta})^2 = 0 - 4(0{,}2)^2$

$a_r = -4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = -0{,}16$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$

$a_z = -0{,}02\cos(0{,}2t)$

02

$$\boxed{\vec{a}(t) = [-0{,}16\,\hat{r} - 0{,}02\cos(0{,}2t)\,\hat{z}]\ m/s^2}$$

c) $t = 5\pi\ s$

$$\vec{v}(5\pi) = 0{,}8\,\hat{\theta} - 0{,}1\,\cancel{\operatorname{sen}\pi}^{\,0}\,\hat{z}$$

$$\boxed{v(5\pi) = 0{,}8\ m/s}$$

$$\vec{a}(5\pi) = (-0{,}16\,\hat{r} - 0{,}02\cos\pi\,\hat{z})$$

$$a(5\pi) = \sqrt{(0{,}16)^2 + (0{,}02)^2}$$

$$= \sqrt{(16 \cdot 10^{-2})^2 + (2 \cdot 10^{-2})^2}$$

$$= \sqrt{16^2 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4}}$$

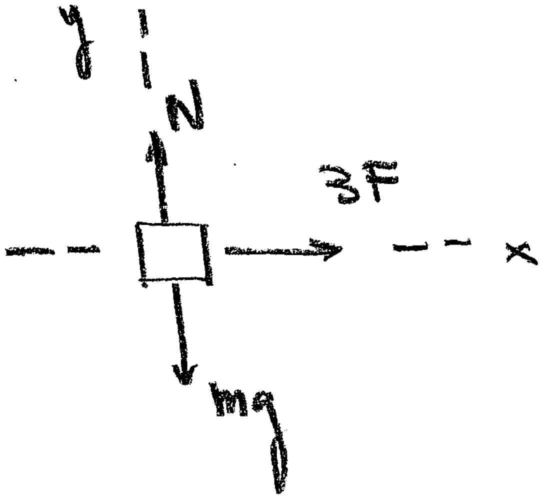
$$= 10^{-2}\sqrt{260} = 2 \cdot 10^{-2}\sqrt{65}$$

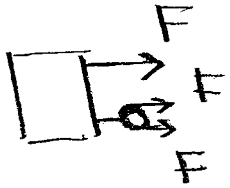
$$= 0{,}2\sqrt{65}$$

$$\boxed{a(5\pi) = 0{,}2\sqrt{65}\ \ m/s^2}$$

#02.

a)





x: $3F = ma_x = ma$

y: $N - mg = ma_y = 0$

b) $a = \frac{3F}{m} = \frac{3 \cdot \cancel{180}\, t^{1/2}}{\cancel{180}} = 3 \cdot \sqrt{t}$

$\vec{a}(4s) = 3.2\hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{a}(4s) = 6\, m/s^2 \hat{x}}$

c) $a(t) = 3t^{1/2} = \frac{dv}{dt}$

$$\int_{v(0)}^{v(t)} dv = \int_0^t 3t^{1/2}\, dt \Rightarrow v(t) - v_0 = 3\, \frac{t^{3/2}}{3/2} \Big|_0^t$$

$$\boxed{\vec{v}(t) = 2t^{3/2}\hat{x}}$$

d) $P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = F(t)\, v(t)$

pois $\vec{F} \parallel \hat{x}$, $\vec{v} \parallel \hat{x}$

$F(4s) = 150 . \sqrt{4}$, $v(4s) = 2\,(4)^{3/2}$

$v(4s) = 2.4.2 = 16\, m/s$

$P(4s) = F(4s)\, v(4s)$

$= 150 . 2 . 16$

$$\boxed{P(4s) = 4800 W}$$

\#03. a) $\rho = \dfrac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{\left| d^2y/dx^2 \right|}$

$\dfrac{y^2}{16} = 1 - \dfrac{x^2}{9} \Rightarrow y = 4\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$

$\longrightarrow$

$$y = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{1/2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_B = 0} = \frac{4}{2}\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-1/2} \cdot \left(-\frac{2x}{9}\right)\Bigg|_{x=0} = 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_B = 0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\Bigg|_{x_B}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{9}x\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-1/2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4}{9}\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-1/2} - \frac{4x}{18}\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\left(-\frac{2x}{9}\right)$$

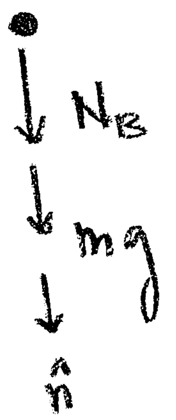
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x_B = 0} = -\frac{4}{9}$$

Portanto, $\rho_B = \dfrac{[1+0]^{3/2}}{\left|\frac{4}{9}\right|} = \dfrac{9}{4}\,m \Rightarrow \rho_{B,G} = \dfrac{9}{4} - 1{,}2$

$$\boxed{\rho_{B,G} = 21/20\ m}$$

06 .

b)



$$\hat{n}: \boxed{N_B + mg = \frac{m v_B^2}{\rho_{B,G}}}$$

Como V_A é mínimo para que o "loop" seja feito, então $N_B = 0$.

c) $N_B = 0 \Rightarrow \cancel{m}g = \cancel{m} v_B^2 / \rho_{B,G}$

$$v_B = \sqrt{g \rho_{B,G}} = \sqrt{10 \cdot \frac{21}{20}}$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{21/2} \text{ m/s}}$$

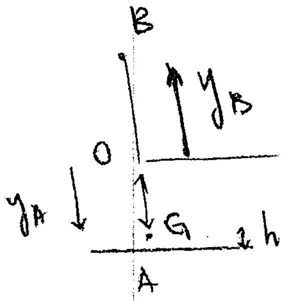
d) Conservação da Energia Mecânica:

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

$$K_A + U_{gA} = K_B + U_{gB}$$

$$\frac{m v_A^2}{2} + m g y_A = \frac{m v_B^2}{2} + m g y_{B,G}$$

$$y_{B,G} = y_B - 1{,}2$$



$v_A^2 = ?$

$y_A = -4 + 1{,}2 = -2{,}8\,m$

$y_{B,G} = ?$ $\quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, $x_B = 0 \Rightarrow y_B = 4m$

$y_{B,G} = 2{,}8\,m$

$$\frac{v_A^2}{2} + 10(-2{,}8) = \frac{21/2}{2} + 10 \cdot 2{,}8$$

$$\frac{v_A^2}{2} = 28 + \frac{21}{4} + 28$$

$$v_A^2 = \frac{56 \cdot 4 + 21}{2}$$

$$v_A^2 = 245/2$$

$$v_A = \sqrt{49 \cdot 5/2} = 7\sqrt{5/2}$$

$$\boxed{v_A \simeq 11\,m/s}$$