Universidade de Pernambuco
Escola Politécnica de Pernambuco
10 de julho de 2014

Mecânica 2 – 1° Semestre 2014 – Exame Final

Turma FD

Nome:____

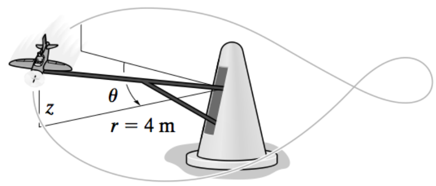
ATENÇÃO:

Soluções sem os respectivos desenvolvimentos, claramente explicitados, NÃO SERÃO CONSIDERADAS. Todas as equações estão em unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI).

Nos problemas de resolução numérica considere g = 10 m/s^2.

01. (2,5 pontos) Um pequeno avião de um parque de diversões se move ao longo de uma trajetória de equações $r = 4\ m$, $\theta = 2t$ e $z = cos\theta$. Determine:

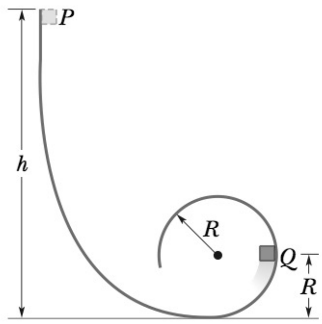
a) (0,5) a velocidade do avião em função do tempo;
b) (1,0) a aceleração do avião em função do tempo;
c) (1,0) o módulo da aceleração do avião para $t = \pi\ s$.



Dados: $\vec{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} + a_z\hat{z},\ a_r = \ddot{r} - r\left(\dot{\theta}\right)^2,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta},\ a_z = \ddot{z}.$

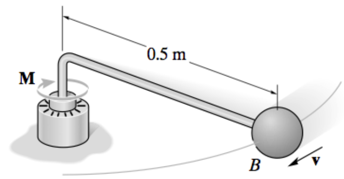
02. (2,5 pontos) Um pequeno bloco de massa m pode deslizar sem atrito ao longo da trajetória mostrada na figura. Sabendo que o bloco é abandonado do repouso no ponto P, de altura $h = 5R$. Calcule:

a) (0,5) o trabalho da força gravitacional sobre o bloco entre os pontos P e Q;
b) (1,0) o módulo da velocidade do bloco quando ele passa pelo ponto Q;
c) (1,0) o módulo da força de reação normal sobre o bloco quando ele passa pelo ponto Q.



03. (2,5 pontos) A bola B possui uma massa $m = 10\ kg$ e está presa à extremidade de uma barra de massa desprezível e comprimento $0{,}5\ m$. O sistema está submetido ao torque $M(t) = (2t^2 + 4)\ Nm$, onde t está em segundos, e em $t = 0$ a velocidade da bola é igual a $2\ m/s$. Calcule:

a) (1,0) o momento angular inicial da bola;
b) (1,5) o módulo da velocidade da bola em $t = 3\ s$.

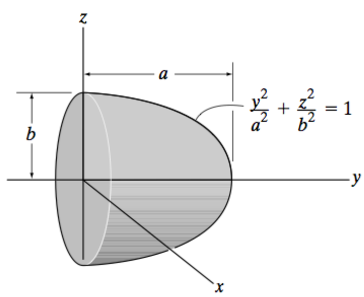


04. (2,5 pontos) O sólido mostrado na figura é formado pela revolução completa da curva

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

em torno do eixo y. Suponha que este sólido possui uma densidade volumétrica de massa constante e igual a ρ.

a) (1,0) Calcule a massa total deste corpo.
b) (1,5) Obtenha o momento de inércia do objeto em torno do eixo y.



MECÂNICA 2 – TURMA FD

EXAME FINAL

2014.1

RESOLUÇÃO

#01. $r = 4$, $\theta = 2t$, $z = \cos\theta = \cos 2t$

a) $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z}$

$\vec{v} = 0\hat{r} + 8\hat{\theta} - 2\,\text{sen}\,2t\,\hat{z}$

$$\boxed{\vec{v} = 2(4\hat{\theta} - \text{sen}\,2t\,\hat{z})} \quad (m/s)$$

b) $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 4.(2)^2 = -16$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 4.0 + 2.0.2 = 0$

$a_z = \ddot{z} = -4\cos 2t$

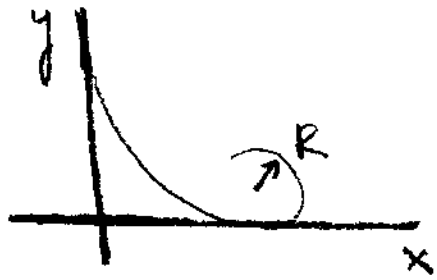
$$\boxed{\vec{a} = -4(4\hat{r} + \cos 2t\,\hat{z})} \quad (m/s^2)$$

c) $\vec{a}(t=\pi) = -16\hat{r} - 4\cos 2\pi\,\hat{z}$

$$\vec{a} = -16\hat{r} - 4.1\hat{z} \Rightarrow \vec{a}(\pi) = -4(4\hat{r}+\hat{z})$$

$$\boxed{a(\pi) = 4\sqrt{17}\ m/s^2}$$

#02. a) $W_g = -mg\Delta y$



$$W_g = -mg(R-h)$$

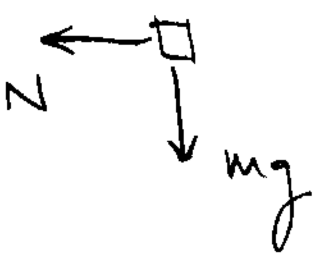
$$W_g = -mg(-4R) \rightarrow \boxed{W_g = 4mgR}$$

b) $\Delta K = W_g$

$$\frac{\cancel{m}v_Q^2}{2} - 0 = 4\cancel{m}gR$$

$$\boxed{v_Q = 2\sqrt{2gR}}$$

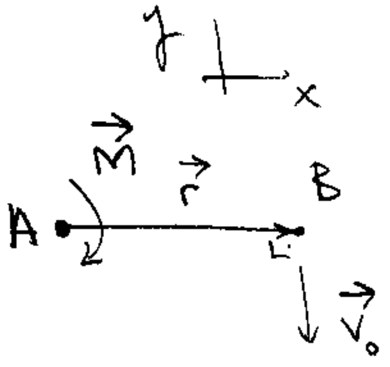
c)



$$N = \frac{mv_Q^2}{R} = \frac{m \cdot 8gR}{R}$$

$$\boxed{N = 8mg}$$

#03. a)



$$\vec{l}_{A_0} = \vec{r} \times m\vec{v}_0$$

$$l_{A_0} = rmv \operatorname{sen} 90^\circ = 0{,}5 \cdot 10 \cdot 2 = 10$$

$$\boxed{\vec{l}_{A_0} = 10 \, kg\,m^2/s \; (-\hat{z})}$$

b) $$\Delta \vec{l}_A = \int_0^3 \vec{M}(t)\, dt$$

$$\Delta \vec{l}_A = (-\hat{z}) \int_0^3 (2t^2 + 4)\, dt = \left(2\frac{t^3}{3} + 4t \right) \Bigg|_0^3$$

$$\Delta \vec{l}_A = (-\hat{z})\,(2 \cdot 9 + 12) = 30\,(-\hat{z})$$

$$\vec{l}_A - \vec{l}_{A_0} = 30\,(-\hat{z})$$

$$\vec{l}_A = \vec{l}_{A_0} - 30\hat{z} \text{, como } \vec{l}_A \parallel \vec{l}_{A_0} \parallel -\hat{z}:$$

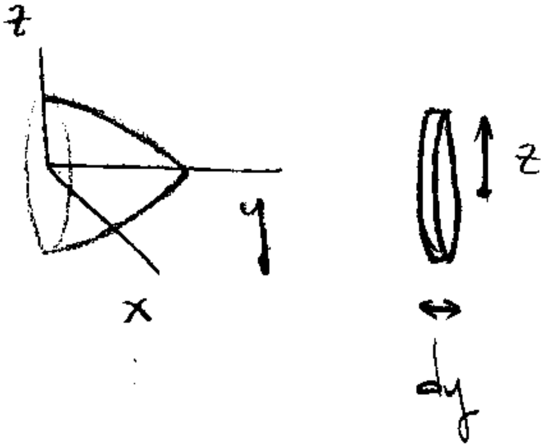
$$-\hat{z}\, rmv = -\hat{z} \cdot 10 - 30\hat{z}$$

$\longrightarrow$

04

$$-5v = -10 - 30 \Rightarrow \boxed{v = 8 m/s}$$

#04. $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$



a) $m = \int dm = \int \rho \, dV$

$$dV = \pi z^2 dy \Rightarrow m = \int \pi \rho z^2 dy$$

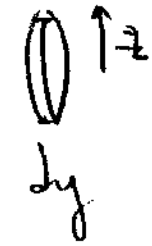
$$\frac{z^2}{b^2} = 1 - \frac{y^2}{a^2} \Rightarrow z^2 = b^2\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

$$\therefore \quad m = \pi b^2 \rho \int_0^a \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) dy$$

$$m = \pi b^2 \rho \left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) = \frac{2}{3} \pi a b^2 \rho$$

$$\boxed{m = \frac{2}{3} \pi \rho a b^2}$$

b) $$I = \int dI = \int \frac{dm\, z^2}{2}$$ → momento de inércia de um disco infinitesimal



$$I = \frac{1}{2}\rho \int z^2\, dV = \frac{\pi}{2}\rho \int_0^a z^4\, dy$$

$$I = \frac{\pi\rho}{2} b^4 \int_0^a \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 dy$$

$$I = b^4 \rho \frac{\pi}{2} \int_0^a \left(1 - \frac{2y^2}{a^2} + \frac{y^4}{a^4}\right) dy$$

$$I = b^4 \rho \frac{\pi}{2} \left[a - \frac{2}{3}a + \frac{a}{5} \right]$$

$$I = ab^4 \rho \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{ab^4\rho\pi}{2} \frac{8}{15}$$

$$\boxed{I = \frac{4}{15} ab^4 \rho \pi} \qquad \boxed{I = \frac{2}{5} m b^2}$$